

# Planche n° 4. Réduction

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**Exercice n° 1 (\*\*)** :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Pour  $n$  entier relatif donné, calculer  $A^n$  par trois méthodes différentes.

**Exercice n° 2 (\*\*)** :

Résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'équation  $X^2 = A$  où  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice n° 3 (\*\*)** :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ .

1) Vérifier que  $A$  n'est pas diagonalisable.

2) Déterminer  $\text{Ker}(A - I)^2$ .

3) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

4) Calculer  $A^n$  pour  $n$  entier naturel donné.

**Exercice n° 4 (\*\*\*)** :

Soit  $f$  qui à  $P$  élément de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  associe  $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$ .

Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de  $f$ .  $f$  est-il diagonalisable ?

**Exercice n° 5 (\*\*\*)** :

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$ . Pour  $P$  élément de  $E$ , soit  $f(P)$  le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$  où  $A = X^4 - 1$  et  $B = X^4 - X$ . Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  puis déterminer  $\text{Ker}f$ ,  $\text{Im}f$  et les valeurs et vecteurs propres de  $f$ .

**Exercice n° 6 (\*\*\*)** :

Soit  $A$  une matrice rectangulaire de format  $(p, q)$  et  $B$  une matrice de format  $(q, p)$ . Comparer les polynômes caractéristiques de  $AB$  et  $BA$ .

**Exercice n° 7 (\*\*\*) I** :

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que  $u$  et  $v$  commutent et que  $v$  est nilpotent. Montrer que  $\det(u + v) = \det(u)$ .

**Exercice n° 8 (\*\*\*\*)** :

Soit  $A$  une matrice carrée de format  $n$ .

Montrer que  $A$  est nilpotente si et seulement si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(A^k) = 0$ .

**Exercice n° 9 (\*\*\*) I** :

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant  $fg - gf = f$ . Montrer que  $f$  est nilpotent.

**Exercice n° 10 (\*\*\*\*)** :

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / uv - vu = \alpha u + \beta v$ . Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.

**Exercice n° 11 (\*\*\*)** :

Soit  $E = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\text{matrices carrées de format } 2 \text{ à coefficients dans } \mathbb{Z} \text{ et de déterminant } 1\}$ .

1) Montrer que  $(E, \times)$  est un groupe.

2) Soit  $A$  un élément de  $E$  tel que  $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = I_2$ . Montrer que  $A^{12} = I_2$ .

**Exercice n° 12 (\*\*\*\*) :**

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

**Exercice n° 13 (\*\*\*\*) :**

Soient  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $M$  l'élément de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$  défini par blocs par  $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\det M$ . Déterminer les éléments propres de  $M$  puis montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

**Exercice n° 14 (\*\*\*) :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls tels que  $|a| \neq |b|$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$ .

Montrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de  $A$  sont cocycliques. (Indication : pour calculer  $\chi_A$ ,

considérer  $f(x) = \begin{vmatrix} X+x & -b+x & \dots & -b+x \\ -a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b+x \\ -a+x & \dots & -a+x & X+x \end{vmatrix}$ .)

**Exercice n° 15 (\*\*\*) I) : (matrices stochastiques).**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} \in [0, 1]$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

1) Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .

2) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ .

a) Montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .

b) Montrer qu'il existe un réel  $\omega$  de  $[0, 1]$  tel que  $|\lambda - \omega| \leq 1 - \omega$ . Conséquence géométrique ?

**Exercice n° 16 (\*\*)** :

Soit  $A$  une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.

**Exercice n° 17 (\*\*)** :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice n° 18 (\*\*\*) I) : (déterminant circulant).**

1) Soit  $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  (de format  $n \geq 3$ ). Diagonaliser  $J_n$ .

2) En déduire la valeur de  $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$ .

**Exercice n° 19 (\*\*\*) I) : (matrices de permutations).**

Pour  $\sigma \in S_n$ ,  $n \geq 2$ , on définit la matrice  $P_\sigma$  par  $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

1) Calculer  $\det(P_\sigma)$  pour tout  $\sigma \in S_n$ .

2) a) Montrer que  $\forall(\sigma, \sigma') \in S_n^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$ .

b) On pose  $G = \{P_\sigma, \sigma \in S_n\}$ . Montrer que  $(G, \times)$  est un groupe isomorphe à  $S_n$ .

3) Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Calculer  $AP_\sigma$ .

4) Trouver les valeurs propres d'une matrice de permutation (on pourra utiliser le résultat hors programme : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).

### Exercice n° 20 (\*\*\*) : (Décomposition de DUNFORD).

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $f$  un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes  $(d, n)$  et un seul tel que  $d$  est diagonalisable,  $n$  est nilpotent et  $f = d + n$ .

### Exercice n° 21 (\*\*)

Trouver une matrice carrée  $A$  vérifiant  $A^4 - 3A^3 + A^2 - I = 0$ .

### Exercice n° 22 (\*\* I)

Calculer  $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$ .

### Exercice n° 23 (\*\*\*)

Soit  $A$  une matrice carrée de format 2 telle que  $A^2$  est diagonalisable et  $\text{Tr}A \neq 0$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

### Exercice n° 24 (\*\*\*)

$E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Pour  $f$  élément de  $E$ ,  $\varphi(f)$  est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } (\varphi(f))(0) = f(0).$$

1) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de  $\varphi$ .

3) Déterminer les éléments propres de  $\varphi$ .

### Exercice n° 25 (\*\*\*) I)

Sur  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On donne trois endomorphismes  $f$ ,  $u$  et  $v$  tels qu'il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

### Exercice n° 26 (\*\* I)

Résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  l'équation  $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Exercice n° 27 (\*\*\*)

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle qui commutent. Montrer que  $f$  et  $g$  sont simultanément trigonalisables.

### Exercice n° 28 (\*\*)

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées complexes de format  $n$ . Montrer que  $A$  et  $B$  n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice  $\chi_A(B)$  est inversible.

### Exercice n° 29 (\*\*)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(f)$  est inversible si et seulement si  $P$  et  $\chi_f$  sont premiers entre eux.

**Exercice n° 30 (\*\*)** : (ESTP1994)

Soit  $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices  $M_{0,0}$ ,  $M_{0,1}$ ,  $M_{1,0}$  et  $M_{1,1}$  ?

**Exercice n° 31 (\*\*\*\*)** :

Trouver  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la comatrice de  $A$  soit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice n° 32 (\*\*)** :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$  où  $a_1, \dots, a_n$  sont  $n$  nombres complexes ( $n \geq 2$ ).  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice n° 33 (\*\*\*)** :

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$ . Trouver les sous-espaces stables par  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 3) A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice n° 34 (\*\*\*)** :

Résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  l'équation  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ .

**Exercice n° 35 :**

Commutant de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice n° 36 (\*\*)** :

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle et  $F$  un sous-espace non nul de  $E$  stable par  $f$ . On suppose que  $f$  est diagonalisable. Montrer que la restriction de  $f$  à  $F$  est un endomorphisme diagonalisable de  $F$ .

**Exercice n° 37 (\*\* I)** :

Soit  $A$  une matrice carrée réelle de format  $n \geq 2$  vérifiant  $A^3 + A^2 + A = 0$ . Montrer que le rang de  $A$  est un entier pair.